

2.5 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Βαθμωτά ή μονόμετρα μεγέθη : Είναι τα μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται πλήρως αν δοθεί μόνο το μέτρο τους και η μονάδα μέτρησης
π.χ η θερμοκρασία , η μάζα , το μήκος κλπ

2.

Διανυσματικά μεγέθη : Είναι τα μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται όταν δοθεί το μέτρο τους η διεύθυνση και η φορά τους.

3.

Παράσταση : Για να παραστήσουμε ένα διανυσματικό μέγεθος χρησιμοποιούμε ένα μαθηματικό σύμβολο που το λέμε διάνυσμα.
Το διάνυσμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που το ένα άκρο του καθορίζεται σαν αρχή και το άλλο άκρο του σαν πέρας
Έτσι το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B το γράφουμε $\overline{AB}$ και το σχεδιάζουμε όπως φαίνεται παρακάτω



Αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης , για την ονομασία ενός διανύσματος χρησιμοποιούμε ένα μικρό γράμμα επιγραμμισμένο με βέλος και λέμε π.χ το διάνυσμα $\vec{a}$

4.

Χαρακτηριστικά διανύσματος $\overline{AB}$

Η διεύθυνση: Είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα

Η φορά : Είναι ο τρόπος διαγραφής του διανύσματος από το A προς το B ή από το B προς το A

Το μέτρο : Είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

Το μέτρο συμβολίζεται με $|\overline{AB}|$

5.

Ίσα διανύσματα : Είναι τα διανύσματα που έχουν την **ίδια διεύθυνση** (βρίσκονται στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες) την **ίδια φορά** και **ίσα μέτρα** .

6.

Αντίθετα διανύσματα : Είναι τα διανύσματα που έχουν την **ίδια διεύθυνση** (βρίσκονται στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες) **αντίθετη φορά** και **ίσα μέτρα** .

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Η ισότητα $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$: Σημαίνει ότι το M είναι μέσο του τμήματος AB

2.

Η ισότητα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$: Σημαίνει ότι $AB = \Delta\Gamma$ και $AB \parallel \Delta\Gamma$.

Επομένως, αν τα σημεία A, B, Γ, Δ δεν είναι συνευθειακά, τότε το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

3.

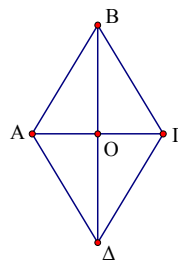
Συμβολισμός : Το αντίθετο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ το συμβολίζουμε με $-\overrightarrow{AB}$ και είναι προφανές ότι ισχύει $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Στο διπλανό ρόμβο χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες.

- α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ β) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ γ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta}$
 δ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$ ε) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$ στ) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$



Προτεινόμενη λύση

- α) Λάθος αφού δεν έχουν την ίδια φορά
 β) Σωστό αφού έχουν την ίδια διεύθυνση την ίδια φορά και ίσα μέτρα
 γ) Λάθος αφού δεν έχουν την ίδια διεύθυνση
 δ) Λάθος αφού δεν έχουν την ίδια διεύθυνση
 ε) Σωστό αφού οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες
 στ) Σωστό όπως και το (ε)

2.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

- α) Τα ίσα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση Σ
 β) Τα αντίθετα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση Σ
 γ) Τα ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα Σ
 δ) Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα Σ
 ε) Το μέτρο ενός διανύσματος είναι αρνητικός αριθμός Λ
 στ) Δύο διανύσματα με ίσα μέτρα είναι ίσα Λ

Απάντηση

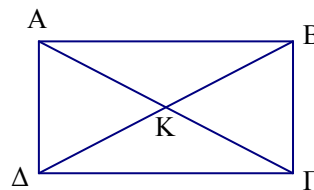
Παραπάνω. Από τη θεωρία

3.

Στο διπλανό σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Συμπληρώστε τα κενά

- α) $\overrightarrow{\Gamma B} = \dots$
 β) Τα $\overrightarrow{AK}$ και $\overrightarrow{\Gamma K}$ είναι ...
 γ) Τα $\overrightarrow{KB}$ και $\overrightarrow{\Delta K}$ είναι ...
 δ) Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ...
 ε) Τα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$ έχουν ...



Απάντηση

Από γνωστές ιδιότητες του ορθογωνίου έχουμε

- α) $\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Delta A}$
 β) Τα $\overrightarrow{AK}$ και $\overrightarrow{\Gamma K}$ είναι **αντίθετα**
 γ) Τα $\overrightarrow{KB}$ και $\overrightarrow{\Delta K}$ είναι **ίσα**
 δ) Τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι **αντίθετα**
 ε) Τα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$ έχουν **ίσα μέτρα**

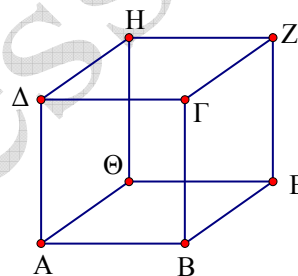
4.

Στο διπλανό κύβο να βρείτε ποια διανύσματα

- α) Έχουν την ίδια διεύθυνση με το $\overrightarrow{A\Delta}$
 β) Ίδια φορά με το $\overrightarrow{Z\Gamma}$
 γ) Είναι ίσα με το $\overrightarrow{\Theta E}$
 δ) Είναι αντίθετα του $\overrightarrow{\Theta H}$

Απάντηση

- α) $\overrightarrow{\Theta H}$, $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$
 β) $\overrightarrow{H\Delta}$, $\overrightarrow{\Theta A}$, $\overrightarrow{EB}$
 γ) $\overrightarrow{HZ}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$
 δ) $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{ZE}$



5.

Στις παρακάτω ερωτήσεις επιλέξτε την σωστή απάντηση

- α) Στο διπλανό παραλληλόγραμμο **δεν** ισχύει

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}, \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|, \quad \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma},$$

$$\overrightarrow{A\Delta} = -\overrightarrow{\Gamma B}, \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$$

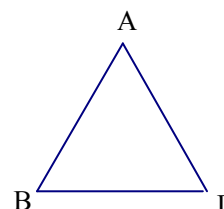
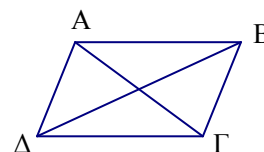
- β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}, \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}, \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}|$$

Απάντηση

- α) Δεν ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$

- β) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}|$



6.

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να πάρετε τα σημεία $A(4, 3)$ και $B(-2, 4)$

α) Να σχεδιάσετε διάνυσμα $\vec{B\Gamma} = \vec{OA}$ και διάνυσμα $\vec{A\Delta}$ αντίθετο του $\vec{OB}$

β) Να υπολογίσετε τα $|\vec{B\Gamma}|$ και $|\vec{A\Delta}|$

Προτεινόμενη λύση

α)

Από το B φέρω τμήμα $B\Gamma = // OA$ και ίδιας

φοράς. Τότε $\vec{B\Gamma} = \vec{OA}$

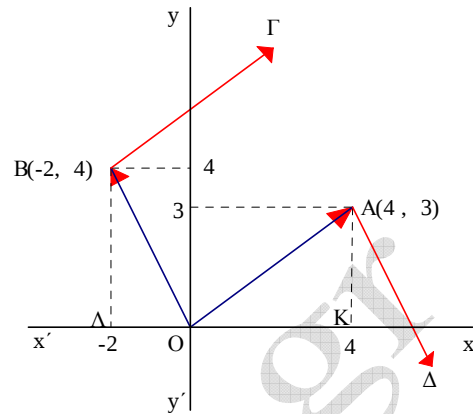
Από το A φέρω τμήμα $A\Delta = // OB$ και

αντίθετης φοράς. Τότε $\vec{A\Delta} = -\vec{OB}$

β)

$$\begin{aligned} \text{Είναι } |\vec{B\Gamma}| &= |\vec{OA}| = \sqrt{OK^2 + KA^2} = \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Και } |\vec{A\Delta}| &= |\vec{OB}| = \sqrt{OL^2 + LB^2} = \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \end{aligned}$$



7.

Στο διπλανό τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ να σχεδιάσετε

διάνυσμα $\vec{B\Xi}$ αντίθετο του $\vec{\Gamma A}$

Να αποδείξετε ότι $\vec{E\Gamma} = -\vec{AB}$ και $\vec{E\Gamma} = \vec{\Gamma\Delta}$

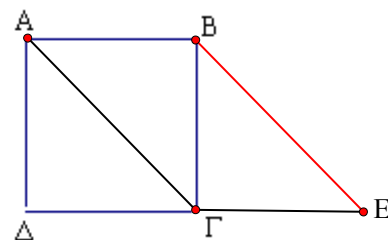
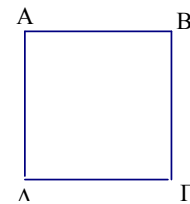
Προτεινόμενη λύση

Φέρω τμήμα $BE = // A\Gamma$ και ίδιας φοράς.

Τότε το διάνυσμα $\vec{B\Xi}$ είναι το αντίθετο του $\vec{\Gamma A}$

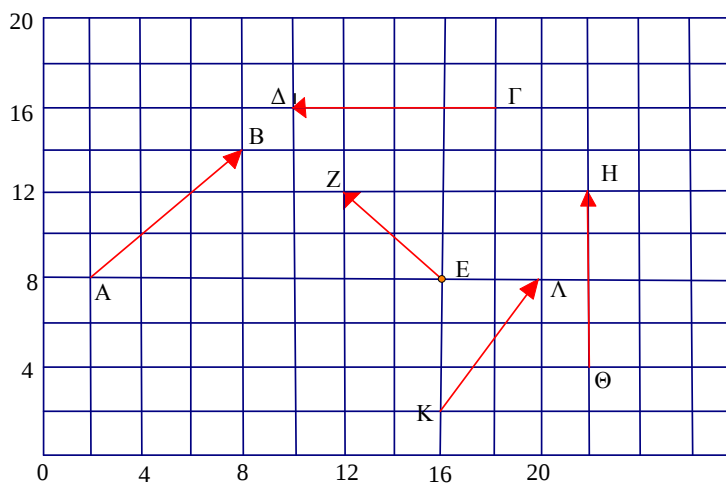
Το $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο άρα

$$\vec{E\Gamma} = \vec{BA} = -\vec{AB} \quad \text{και} \quad \vec{E\Gamma} = \vec{BA} = \vec{\Gamma\Delta}$$



8.

Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων που φαίνονται στο σχήμα



Προτεινόμενη λύση

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AP^2 + PB^2} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$$

$$|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 8$$

$$|\overrightarrow{ZE}| = \sqrt{NE^2 + NZ^2} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$|\overrightarrow{\Theta H}| = 8$$

$$|\overrightarrow{K\Lambda}| = \sqrt{KM^2 + M\Lambda^2} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$$

